GAVSS
DISQVISITIO
DE ELEMENTIS
ELLIPTICIS
N. 15 T. 1

DISQVISITIO
DE
ELEMENTIS ELLIPTICIS PALLADIS
EX
OPPOSITIONIBVS ANNORVM 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809

AVCTORE
CAROLO FRIDERICO GAVSS.

SOCIETATI REGIAE TRADITA NOV. 25. 1810.

1.

Planetae primarii Palladis menſe Martio anni 1802 detecti ſeptem quidem hactenus fuerunt apparitiones periodicae: attamen quum planeta eo quo primum detectus eſt die oppoſitionem cum ſole iam transgreſſus eſſet, ſex tantummodo oppoſitiones hucusque numerantur, quae ad maximam partem in pluribus ſpeculis aſtronomicis ſatis bene obſeruatae ſunt, adeoque praeciſione ſufficiente determinari potuerunt. Vnicam oppoſitionem anni 1808 excipere oportet, quo anno planeta in aphelio orbitae verſatus propter luminis debilitatem magnas obſeruantibus difficultates obiecit, et vt verum fateamur ab aſtronomis aliquantulum neglectus eſt. Aſcenſionum quidem rectarum copiam ſatis magnam ſuppeditauit clar. de Lindenau, ſolita cura ad tubum meridianum praeſtantiſſimum ſpeculae Seebergenſis circa tempus oppoſitionis obſeruatarum: ſed declinationes paucas tantum longeque minus certas aliunde obtinere potui Quamobrem haud licuit, hancce oppoſitionem eadem qua ceteras praeciſione ſtabilire, imprimisque latitudo nimis incerta manſit.

2.

Quamprimum obſeruationes cuiusuis apparitionis finitae eſſent, omnes quotannis colligere, diligenter diſcutere, et cum obſeruationibus annorum antecedentium combinare ſolitus fui, vt elementorum ellipticorum determinatio tanto accuratior inde erueretur. E poſtremo huiuscemodi calculo, ſub finem anni 1807 inſtituto, elementa prodierunt in Vol. XVII Commercii literarii aſtronomici clar. DE ZACH p. 184 publici iuris facta, omnesque quatuor oppoſitiones eousque obſeruatas optime conciliantia. Anno inſequente poſt oppoſitionem quintam obſeruationum certarum penuria a nouis calculis me deterruit, ad quos tunc demum reuerti, vbi obſeruationes anno 1809 circa oppoſitionem ſextam factae computum vtriusque oppoſitionis ſimul ſuſcipere permiſerunt, quem in Nouis noſtris literariis anni 1810 Nro. 32. indicaui.

Ecce iam conſpectum omnium ſex oppoſitionum hactenus obſeruatarum.

Tempus oppoſitionis ad meridianum Gottingenſem.	Dies inde ab initio anni 1803	Longitudo heliocentrica	Latitudo geocentrica
1803 Iun. 30. 0^h 27′ 32″	181,019120	277° 39′ 24″,0	+ 46° 26′ 36″,0
1804 Aug. 30. 4. 58. 27	608,207257	337 0 36,1	+ 15 1 49,8
1805 Nov. 29. 11. 15. 4	1064,468796	67 20 42,9	− 54 30 54,9
1807 Maj. 4. 14. 37. 41	1585,609502	223 37 27,7	+ 42 11 25,6
1808 Iul. 26. 21. 17. 32	2034,887176	304 2 59,7	+ 37 43 53,7
1809 Sept. 22. 16. 10. 20	2457,673843	359 40 4,4	− 7 22 10,1

3.

Si Pallas exacte moueretur in ellipſi, atque ſecundum leges Kepleri, elementa nouiſſima quatuor oppoſitiones annorum 1803, 1804, 1805, 1807 optime conciliantia leuiſſimis tantum erroribus adhuc affecta eſſe poſſent, certoque cum oppoſitionibus proximis quoque intra minutum primum vnum duoue conſentire deberent.

Tantum

Tantum vero abfuit a conſenſu tam arcto, vt potius elementa iſta discrepantiam ad quatuor minuta prima aſcendentem iam in oppoſitione quinta monſtrauerint, a ſexta vero duodecim minutis primis aberrauerint. Scilicet tantas perturbationes patitur planeta noſter a reliquis praeſertimque a Ioue, vt conſenſus exactus atque ſtabilis inter phaenomena motumque pure ellipticum obtineri nequeat. Hinc ſimul patet, elementa alia atque alia proditura eſſe, prout oppoſitionibus quaternis aliis aliisue ſuperſtruantur, quod confirmatum eſt per calculum duorum aliorum ſyſtematum elementorum, quorum alterum ex oppoſitionibus annorum 1804, 1805, 1807, 1808, alterum ex oppoſitionibus annorum 1805, 1807, 1808, 1809 nuper deduxi. Quo melius haec diuerſa elementorum ſyſtemata inter ſe conferri poſſint, ſingula hic profero.

I. Elementa elliptica Palladis ex oppoſitionibus annorum 1803, 1804, 1805, 1807.

Epocha longitudinis mediae pro anno 1803 ad meridianum Gottingenſem	221° 39′ 30″ 4
Motus diurnus medius tropicus	770″ 2143
Longitudo perihelii 1803	121° 3′ 11″ 4
Longitudo nodi aſcendentis 1803	172 28 56,9
Inclinatio orbitae	34 37 41,0
Excentricitas. (= ſin. 14° 10′ 58″ 81)	0,2450198
Logarithmus ſemiaxis maioris	0,4423149

II. Elementa elliptica Palladis ex oppoſitionibus annorum 1804, 1805, 1807, 1808.

Epocha longitudinis mediae 1803	221° 34′ 56″ 7
Motus medius tropicus diurnus	770″ 4467
Longitudo perihelii 1803	121 5 22,1

Longitudo nodi afcendentis 1803	172 28 46,8
Inclinatio orbitae	34 37 31,5
Excentricitas (= fin. 14° 10′ 4″ 08)	0,2447624
Logarithmus femiaxis maioris	0,4422276

III. Elementa elliptica Palladis ex oppofitionibus annorum 1805, 1807, 1808, 1809.

Epocha longitudinis mediae 1803	221° 23′ 24″ 6
Motus medius tropicus diurnus	770″ 9265
Longitudo perihelii 1803	120 58 4,8
Longitudo nodi afcendentis 1803	172 27 52,4
Inclinatio orbitae	34 36 49,4
Excentricitas (= fin. 14° 9′ 36″ 63)	0,2446335
Logarithmus femiaxis maioris	0,4420473

4.

Quonam modo orbita elliptica planetae e quatuor obferuationibus (quarum duae tantum completae funt) determinari poffit, in Sect. II. Libri II. Theoriae motus corporum coeleftium monftraui. Solutio illic tradita problema maxima generalitate complectitur: attamen pro cafu fpeciali, vbi quatuor obferuationes funt oppofitiones, methodum aliam in vfum vocare praeftat, cuius expofitionem aftronomis haud ingratam fore fpero. Poftulat quidem haecce methodus cognitionem approximatam fingulorum elementorum, vel faltem horum quatuor, inclinationis orbitae, longitudinis nodi, longitudinis perihelii atque excentricitatis; fed nihil impedit, quominus hanc cognitionem per calculum anteriorem iam adeffe fupponamus. Rei fumma pendet a folutione problematis fequentis:

« *Datis quatuor longitudinibus planetae in orbita, temporibus da-*
„tis refpondentibus, inuenire longitudinem perihelii, excentricitatem,
„motum medium diurnum atque epocham longitudinis mediae"

quam in art. fequ. tradam.

5.

5.

Quum longitudo perihelii proxime iam nota esse supponatur, oriantur ex huius subtractione a longitudinibus in orbita anomaliae verae approximatae v, v', v'', v''', vbi longitudo illa vel tamquam constans spectari potest, vel si ipsius variatio annua nota fuerit, ad singula tempora rite transferenda est. Sit $e = \sin\varphi$ excentricitas approximata, qua adhibita computentur per methodos notas anomaliae mediae M, M', M'', M''' veris v, v', v'', v''' respondentes. Designando iam tempora per t, t', t'', t''', horum differentiae $t'-t$, $t''-t'$, $t'''-t''$ differentiis $M'-M$, $M''-M'$, $M'''-M''$ proportionales esse deberent, si a valoribus veris longitudinis perihelii atque anguli φ profecti essemus: sin secus euenit, correctiones his quantitatibus applicandae sequenti modo eruentur. Statuendo

$$m = -\frac{\cos\varphi^3}{(1+e\cos v)^2},\quad n = \frac{m(2+e\cos v)\sin v}{\cos\varphi}$$

$$m' = -\frac{\cos\varphi^3}{(1+e\cos v')^2},\quad n' = \frac{m'(2+e\cos v')\sin v'}{\cos\varphi}$$

$$m'' = -\frac{\cos\varphi^3}{(1+e\cos v'')^2},\quad n'' = \frac{m''(2+e\cos v'')\sin v''}{\cos\varphi}$$

$$m''' = -\frac{\cos\varphi^3}{(1+e\cos v''')^2},\quad n''' = \frac{m'''(2+e\cos v''')\sin v'''}{\cos\varphi}$$

ex art. 15 Theoriae Motus Corporum Coelestium patet, si perihelium incremento exiguo $d\pi$, atque angulus φ incremento $d\varphi$ correcti concipiantur, valores correctos anomaliarum mediarum fieri

$$M + m\,d\pi + n\,d\varphi$$
$$M' + m'\,d\pi + n'\,d\varphi$$
$$M'' + m''\,d\pi + n''\,d\varphi$$
$$M''' + m'''\,d\pi + n'''\,d\varphi$$

siquidem potestates productaque correctionum $d\pi$, $d\varphi$ negligere liceat. Habebuntur itaque tres expressiones motus medii diurni respectu perihelii, puta

M′—M

$$\frac{M'-M}{t'-t} + \frac{m'-m}{t'-t}\,d\pi + \frac{n'-n}{t'-t}\,d\varphi$$

$$\frac{M''-M'}{t''-t'} + \frac{m''-m'}{t''-t'}\,d\pi + \frac{n''-n'}{t''-t'}\,d\varphi$$

$$\frac{M'''-M''}{t'''-t''} + \frac{m'''-m''}{t'''-t''}\,d\pi + \frac{n'''-n''}{t'''-t''}\,d\varphi$$

e quarum aequalitate incognitae $d\pi$, $d\varphi$ eruentur. Quibus in expreſſione vna ſubſtitutis, prodibit motus medius correctus, vnde per methodum notam etiam ſemiaxis maior determinabitur. Denique ſubſtitutis valoribus correctionum $d\pi$, $d\varphi$ in expreſſione pro aliqua anomalia media, huius valor correctus, atque inde epocha longitudinis mediae ad tempus arbitrarium transferenda ſponte demanabunt.

Ceterum facile patet, quo pacto etiam perturbationum tum periodicarum tum ſaecularium, ſi opus videatur, ratio haberi poſſit. Scilicet ab illis tantummodo longitudines in orbita datas, antequam in calculum introducantur purgare, per poſteriores autem longitudinem perihelii atque excentricitatem pro epocha arbitraria ſuppoſitam ad ſingula tempora t, t', t'', t''' transferre oportebit.

6.

Iam videamus, quomodo haec ad determinationem orbitae e quatuor oppoſitionibus obſeruatis adhiberi poſſint. Sit longitudo planetae in ecliptica oppoſitione prima α, latitudo geocentrica β, diſtantia terrae a Sole R, longitudo nodi aſcendentis approximata ☊, inclinatio plani orbitae ad eclipticam approximata i. Quantitates ad oppoſitiones reliquas ſpectantes per characteres ſimiles indice vno, duobus vel tribus diſtinctos denoto. Ex α, ☊, i deducetur per formulam notam longitudo in orbita, ſimilisque calculus tribus longitudinibus reliquis in ecliptica ſuperſtruetur. Ex his quatuor longitudinibus in orbita per praecepta art. praec. deriuabuntur elementa

menta elliptica, atque hinc per formulas notas quatuor radii vectores r, r', r'', r'''. Statuendo iam

$$\frac{R \sin \mathcal{B}}{r} = \sin(\mathcal{B} - \gamma), \quad \frac{R' \sin \mathcal{B}'}{r'} = \sin(\mathcal{B}' - \gamma') \text{ etc.}$$

erunt manifesto γ, γ', γ'', γ''' quatuor longitudines heliocentricae, e latitudinibus geocentricis deductae. Deriuemus easdem e longitudinibus, ponendo

$$\operatorname{tang} i \sin(\alpha - \Omega) = \operatorname{tang} \delta, \ \operatorname{tang} i \sin(\alpha' - \Omega) = \operatorname{tang} \delta' \text{ etc.}$$

patetque esse debere $\gamma = \delta$, $\gamma' = \delta'$, $\gamma'' = \delta''$, $\gamma''' = \delta'''$, si pro Ω atque i valores veri accepti essent, siquidem omnibus quatuor oppositionibus (quae problema plusquam determinatum reddunt) per eandem ellipsin satisfacere possibile fuerit. Quod si secus eueniat, correctiones $d\Omega$, di quantitatibus Ω, i applicandae sequenti modo elicientur. Quatenus has correctiones tamquam quantitates exiguae primi ordinis spectantur, quarum potestates productaque negligere licet, manifesto adhibitis valoribus $\Omega + d\Omega$, $i + di$, loco latitudinum γ, δ, γ', δ' etc prodibunt aliae huius formae

$$\gamma + a d\Omega + b di, \quad \delta + e d\Omega + f di$$

$$\gamma' + a' d\Omega + b' di, \quad \delta' + e' d\Omega + f' di \quad \text{etc.}$$

vbi coëfficientes e, f, e', f' etc. inueniententur per formulas

$$e = -\tfrac{1}{2} \sin 2\delta \operatorname{cotang}(\alpha - \Omega), \quad f = \frac{\sin 2\delta}{\sin 2i}$$

$$e' = -\tfrac{1}{2} \sin 2\delta' \operatorname{cotang}(\alpha' - \Omega), \quad f' = \frac{\sin 2\delta'}{\sin 2i} \quad \text{etc.}$$

Coëfficientes a, b etc quoque per operationes analyticas determinare possemus, sed praefero methodum sequentem. Calculum modo indicatum denuo repeto, adhibendo loco longitudinis nodi Ω aliam exigua quantitate ad lubitum electa ab illa discrepantem, vnde valores numerici coëfficientium a, a' etc. facile eruentur; noua eiusdem calculi repetitio, accepta inclinatione paullulum mutata simili modo valores coëfficientium b, b' etc. suppeditabit. Simul hoc modo

 patebit

patebit, quantas correctiones elementa elliptica passura sint, a correctionibus exiguis quantitatum Ω, *i*.

His ita factis, pro determinandis correctionibus $d\Omega$, di *quatuor* adsunt aequationes

$$\gamma - \delta + (a - c)\, d\Omega + (b - f)\, di = o$$
$$\gamma' - \delta' + (a' - c')\, d\Omega + (b' - f')\, di = o$$
$$\gamma'' - \delta'' + (a'' - c'')\, d\Omega + (b'' - f'')\, di = o$$
$$\gamma''' - \delta''' + (a''' - c''')\, d\Omega + (b''' - f''')\, di = o$$

quibus exacte satisfieri vix poterit propter obseruationum errores ineuitabiles; quapropter valores incognitarum $d\Omega$, di maxime idonei per principia in Sect. III. Libri secundi Theoriae Motus Corporum Coelestium explicata determinabuntur. Hinc simul, per ea quae modo diximus, correctiones reliquorum elementorum facile deriuabuntur.

7.

Liceat hisce praeceptis adhuc quasdam obseruationes adiicere.

I. Vix opus erit admonitione, formulas nostras ei quoque casui inseruire posse, vbi nodi non spectantur tamquam quiescentes, si modo valor longitudinis nodi suppositus ab epocha sua ad quatuor tempora rite reducatur, atque hi quatuor valores diuersi pro singulis quatuor locis in formulis istis adhibeantur. Idem valet de inclinatione, siquidem ipsius variatio saecularis innotuerit, ipsiusque rationem habere operae pretium videatur. Si insuper perturbationes latitudinis heliocentricae in calculum introducere placet, hae in aequationibus praecedentibus manifesto vel a γ, γ', γ'', γ''' subduci, vel ipsis δ, δ', δ'', δ''' adiici debebunt.

II. Quoties inclinatio orbitae atque excentricitas modicae sunt, coëfficientes a, b, a', b' etc. tam parui euadunt, vt ipsos negligere, adeoque computo secundo atque tertio supra praescripto supersedere liceat. Tunc inuentis correctionibus $d\Omega$, di (nisi forte perparuae

perparuae euaserint) calculum longitudinum in orbita nouum valoribus correctis longitudinis nodi atque inclinationis, puta $\Omega + d\Omega$, $i + di$, superstruere, atque calculum elementorum ellipticorum ad normam art. 5 repetere oportebit, siquidem longitudines in orbita correctae a prioribus non correctis pluribus minutis secundis diuersae prodierint. Ceterum vix vmquam opus erit, coëfficientes m, n, m' etc. denuo computare, quippe quorum valores iam per hypothesin primam satis exacti inueniuntur.

8.

Ad maiorem illustrationem praeceptorum praecedentium, calculum integrum, per quem systema elementorum tertium ex oppositionibus annorum 1805, 1807, 1808, 1809 determinatum est, hic apponam. Supposui longitudinem nodi ascendentis pro initio anni 1803, $172^\circ\,28'\,46''\,8 = \Omega$, inclinationem orbitae $34^\circ\,37'\,31''\,58$ reduxi illam ad tempora singularum oppositionum, addendo praecessionem $2'\,26''\,01$, $3'\,37''\,50$, $4'\,39''\,12$, $5'\,37''\,11$. Hinc deriuaui ex longitudinibus latitudines heliocentricas

$$\delta = -\,3^\circ\;40'\;50''\,63$$
$$\delta' = +\,28\;\;14\;\;51,24$$
$$\delta'' = +\,27\;\;20\;\;55,86$$
$$\delta''' = -\,4\;\;52\;\;28,44$$

$$\varepsilon = +\,0{,}1252, \qquad f = -\,0{,}9870$$
$$\varepsilon' = -\,0{,}3366, \qquad f' = +\,0{,}8917$$
$$\varepsilon'' = +\,0{,}3609, \qquad f'' = +\,0{,}8727$$
$$\varepsilon''' = +\,0{,}6803, \qquad f''' = -\,0{,}1811$$

Porro prodeunt argumenta latitudinis

$$257^\circ\;25'\;6''73$$
$$56\;\;24\;\;5,96$$
$$126\;\;2\;\;55,07$$
$$188\;\;36\;\;2,69$$

 e qui-

e quibus elementa elliptica elicere oportet. Ad hunc finem ſtatuo angulum $\varphi = 14^\circ\, 10'\, 4''08$ (vti in ſyſtemate elementorum ſecundo inuentus erat), longitudinemque perihelii, pro initio anni 1803, $= 121^\circ\, 5'\, 22''\, 1$. Perihelium (perinde vt nodus) reſpectu ſtellarum fixarum immobile ſupponitur, adeoque ipſius diſtantia a nodo aſcendente conſtans $= 308^\circ\, 36'\, 35''\, 3$. Hinc habemus per formulas notas:

$v\ = 308^\circ\ 48'\ 31''43,\qquad M\ = 328^\circ\ 15'\ 45''08$

$v'\ = 107\ \ 47\ \ 30{,}66,\qquad M'\ = \ 79\ \ 46\ \ 27{,}05$

$v''\ = 177\ \ 26\ \ 19{,}77,\qquad M''\ = 175\ \ 54\ \ 28{,}87$

$v'''= 239\ \ 59\ \ 27{,}39,\qquad M'''= 266\ \ 29\ \ 57{,}59$

$m\ = -\,0{,}68517,\qquad n = +\,1{,}18569$

$m'\ = -\,1{,}06482,\qquad n = -\,2{,}0:318$

$m''\ = -\,1{,}59701,\qquad n = -\,0{,}12921$

$m'''= -\,1{,}18352,\qquad n = +\,1{,}93947$

Denotando igitur correctionem longitudinis perihelii per $d\pi$, atque correctionem anguli φ per $d\varphi$, erit motus medius ſidereus

ab oppoſitione prima vsque ad ſecundam intra dies 521,140706

$111^\circ\, 30'\, 41''\, 97 - 0{,}37965\, d\pi - 3{,}19887\, d\varphi$

ab oppoſitione ſecunda vsque ad tertiam intra dies 449,277674

$96^\circ\, 8'\, 1''{,}82 - 0{,}53219\, d\pi + 1{,}88397\, d\varphi$

ab oppoſitione tertia vsque ad quartam intra dies 422,786667

$90^\circ\, 35'\, 28''72 + 0{,}41349\, d\pi + 2{,}06868\, d\varphi.$

Hinc eruuntur tres expreſſiones pro valore medio diurno ſidereo

$770''31398 - 0{,}0007285\, d\pi - 0{,}0061382\, d\varphi$

$770{,}30718 - 0{,}0011845\, d\pi + 0{,}0041933\, d\varphi$

$771{,}37892 + 0{,}0009780\, d\pi + 0{,}0048930\, d\varphi$

e quarum comparatione demanant aequationes:

$0 = 0''00680 + 0{,}0004560\, d\pi - 0{,}0103315\, d\varphi$

$0 = -\,1{,}07174 - 0{,}0021625\, d\pi - 0{,}0006957\, d\varphi$

atque hinc $d\pi = -\,488''82$, $d\varphi = -\,20''92$, ac proin longitudo perihelii correcta pro initio anni 1803, $120^\circ\, 57'\, 13''\, 28$, valorque

correctus

correctus anguli $\varphi = 14° 9' 43'' 16$. Porro fit motus medius diurnus sidereus $770''7985$, anomalia media correcta pro oppositione prima $328° 20' 55'' 20$, longitudo media pro eadem epocha $89° 20' 34'' 49$. Denique deriuatur ex motu medio sidereo logarithmus semiaxis maioris 0,4420439, adeoque logarithmus semiparametri 0,4152361. Iam quum habeamus valores correctos anomaliarum verarum

$$v = 308° 56' 40'' 25$$
$$v' = 107 \; 55 \; 39, 48$$
$$v'' = 177 \; 34 \; 28, 59$$
$$v''' = 240 \; 7 \; 36, 21$$

computantur logarithmi radiorum vectorum

$$\log r = 0,5531088$$
$$\log r' = 0,4492406$$
$$\log r'' = 0,5369700$$
$$\log r''' = 0,4716739$$

E tabulis Solaribus porro habemus

$$\log R = 9,9937332$$
$$\log R' = 0,0039862$$
$$\log R'' = 0,0065917$$
$$\log R''' = 0,0011160$$

vnde tandem deducimus

$$\gamma = - 33° 39' 48'' 15$$
$$\gamma' = + 28 \; 15 \; 0, 73$$
$$\gamma'' = + 27 \; 20 \; 9, 07$$
$$\gamma''' = - 4 \; 52 \; 53, 99$$

Vt eruantur coëfficientes a, b etc., formo hypothesin secundam, retinendo inclinationem sed augendo longitudinem nodi vno minuto primo, vt sit pro initio anni 1803, $172° 29' 46'' 8$. Statuendo dein vt in hypothesi prima longitudinem perihelii pro eadem epocha $= 121° 5' 22'' 1$, inueniuntur anomaliae verae

 $v =$

$v \;\; = 308^\circ\; 48'\; 40''\,93$
$v' \;= 107\;\; 47\;\; 34,06$
$v'' = 177\;\; 26\;\; 22,25$
$v''' = 239\;\; 59\;\; 15,00$

atque hinc (ſtatuendo quoque $\varphi = 14^\circ\, 10'\, 4''\,08$) anomaliae mediae

$M \;\; = 328^\circ\; 15'\; 51''\,59$
$M' \;= \;\;79\;\; 46\;\; 30,67$
$M'' = 175\;\; 54\;\; 32,83$
$M''' = 266\;\; 29\;\; 42,93$

(Ceterum ad hunc computum non opus eſt, methodum vulgarem adhibere, ſed ſufficit, valoribus anomaliarum mediarum in hypotheſi prima inuentis addere producta e coëfficientibus m, m', m'', m''' poſitiue ſumtis in differentias inter valores reſpectiuos anomaliarum verarum in vtraque hypotheſi, puta

$+\;\; 5''\,50 \times 0,68517 = +\;\; 6''\,51$
$+\;\; 3,40 \times 1,06482 = +\;\; 3,62$
$+\;\; 2,48 \times 1,59701 = +\;\; 3,96$
$-\; 12,39 \times 1,18352 = -\; 14,66$)

Hinc, retinendo valores coëfficientium m, n etc. eruitur

$d\pi = -\; 468''\,21$, longitudo perihelii initio anni 1803, $120^\circ\; 57'\; 33''\,89$

$d\varphi = -\; 20''\,62$, $\varphi = 14^\circ\; 9'\; 43''\,46$

motus medius diurnus ſidereus $= 770''\,7761$

logarithmus ſemiaxis maioris $= 0,4420523$

longitudo media in oppoſitione prima $= 89^\circ\; 20'\; 47''\,85$

$\gamma \;\; = -\; 33^\circ\; 39'\; 51''\,10$
$\gamma' \; = +\; 28\;\; 15\;\;\; 1,27$
$\gamma'' = +\; 27\;\; 20\;\; 10,97$
$\gamma''' = -\;\;\; 4\;\; 52\;\; 54,66$

Tandem formo *hypotheſin tertiam* ſtatuendo $\Omega = 172^\circ\, 28'\, 46''\,6$, $i = 34^\circ\, 38'\, 31''\,5$, vnde perinde vt ante deducitur

longitudo perihelii pro initio anni 1803, $120^\circ\; 55'\; 34''\,46$

$\varphi =$

$\varphi = 14^\circ\ 9'\ 52''\ 63$

motus medius diurnus sidereus $= 770''\ 8398$

logarithmus semiaxis maioris $= 0,4420283$

longitudo media in oppositione prima $= 89^\circ\ 20'\ 20''\ 65$

$\gamma = -\ 33^\circ\ 39'\ 35''\ 63$

$\gamma' = +\ 28\quad 15\quad 5,20$

$\gamma'' = +\ 27\quad 20\quad 9,32$

$\gamma''' = -\ 4\quad 52\quad 52,65$

Comparatio valorum latitudinum heliocentricarum $\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma'''$ in tribus hypothesibus inuentarum producit

$a = -\ 0,0492, \quad b = +\ 0,2087$

$a' = +\ 0,0212, \quad b' = +\ 0,0745$

$a'' = +\ 0,0317, \quad b'' = +\ 0,0042$

$a''' = -\ 0,0112, \quad b''' = +\ 0,0223$

Habentur itaque quatuor aequationes

$+\ 62''\ 48 -\ 0,1744\, d\Omega +\ 1,1957\, di = 0$

$+\ 9,49 +\ 0,3578\, d\Omega -\ 0,8172\, di = 0$

$-\ 46,79 -\ 0,3292\, d\Omega -\ 0,8685\, di = 0$

$-\ 25,55 -\ 0,6915\, d\Omega +\ 0,2034\, di = 0$

e quibus per principium quadratorum minimorum deducitur

$d\Omega = -\ 54'',41$

$di = -\ 42,06$

ita vt habeatur

longitudo nodi ascendentis pro initio anni 1803, $172^\circ\ 27'\ 52''\ 39$

inclinatio orbitae . . . . $34\ 36\ 49,44$

Elementa reliqua vel per comparationem eorum, quae in singulis tribus hypothesibus prodierunt erui, vel quod accuratius est, per calculum nouum longitudinum in orbita atque repetitionem operationum in art. 5 explicatarum determinari poterunt. Methodus prima suppeditat

longitudinem perihelii 1803 . . . . $120^\circ\ 58'\ 3''\ 86$

angu-

angulum φ	14 9 36,25
longitudinem mediam in oppofitioue prima	89 20 32,08
motum medium diurnum fidereum	770″ 7899
logarithmum femiaxis maioris	0,4420471

Per methodum alteram inuenitur

longitudo perihelii 1803	120° 58′ 4″81
angulus φ	14 9 36,63
longitudo media in oppofitione prima	89 20 31,81
motus medius diurnus fidereus	770″ 7893
logarithmus femiaxis maioris	0,4420473

Cum his elementis conueniunt ea, quae fupra (art. 3.) tradidi.

9.

Quantumuis magnae fint perturbationes, quas Pallas a reliquis planetis patitur, tamen, experientia tefte, elementa elliptica quatuor oppofitionibus adaptata planetae motui intra integrum hoc tempus fatis bene fatisfaciunt: quinadeo etiam a motu antecedente ac confequente, nifi interuallum temporis nimium affumatur, parum differunt, ita vt e. g. elementa fecunda in art. 3 tradita, in oppofitione anni 1803 tribus, in oppofitione anni 1809 quinque minutis primis a longitudine heliocentrica obferuata difcrepauerint. Quae quum ita fint, ad conftruendam ephemeridem pro motu planetae futuro femper commodiffimum mihi videtur elementis pure ellipticis vti, quae e quatuor oppofitionibus proxime antecedentibus deriuata erant, fiquidem multitudo aequationum a perturbationibus oriundarum tanta certo euafura eft, vt computus vel vnius loci heliocentrici planetae tantum non aeque operofus euadere debeat, ac calculus elementorum ellipticorum per praecepta fupra tradita. Ita locum planetae geocentricum faluo errore paucorum minutorum primorum tuto femper praedicere licebit, quae praecifio ad inueniendum planetam fufficit.

10.

Attamen poſtulat ſcientiae dignitas, vt conſenſui ſtabiliori proſpiciatur, quem antequam perturbationes in calculum introducantur obtineri non poſſe manifeſtum eſt. Praematurus fuiſſet, meo quidem iudicio, calculus tam prolixus taedii que plenus, quamdiu obſeruationum copia tempus nimis exiguum complectebatur, perturbationesque a planetis reliquis oriundae vix ſe manifeſtabant. Nunc vero, vbi motus ellipticus non amplius ſufficit, ad omnia loca obſeruata inter ſe concilianda, tempus adeſſe videtur, vbi de theoria accuratiori cogitari poteſt. Quo pacto calculum perturbationum, quas Pallas patitur praeſertim a Ioue, commodiſſime atque exactiſſime abſoluendum cenſeam, quum methodis pro aliis planetis adhibitis propter nimiam excentricitatem atque inclinationem vix ac ne vix quidem vti liceat, mox alio loco fuſius explicabo: de elementis autem ellipticis, quae maxime idonea videantur, vt calculus perturbationum ipſis ſuperſtruatur, in ſequentibus adhuc agam. Eruenda ſcilicet mihi propono elementa elliptica, quae non his vel illis oppoſitionibus exacte, ſed omnibus, quae hactenus obſeruatae ſunt, quam proxime ſatisfaciant. Methodum quidem per quam tale negotium exſequi liceat, iam in Theoria motus corporum coeleſtium art. 187 ſuccincte deſcripſi: ſed quum non ſolum ea quae illic generaliter tractaui, in caſu ſpeciali vbi loca obſeruata ſunt oppoſitiones quaedam compendia admittant, ſed etiam quaedam artificia practica, per quae applicationem methodi quadratorum minimorum faciliorem reddere iamdudum ſolitus ſum, in opere illo deſiderentur, aſtronomis haud ingratum fore ſpero, ſi hoſce calculos aliquanto fuſius hic tradidero. Quum totum negotium verſetur in determinatione *correctionum* elementis approximatis, quae ab omnibus locis obſeruatis haud multum aberrare ſupponuntur, adiiciendarum, totus labor a duobus momentis pendebit: primo ſcilicet formari debent aequationes lineares, quas ſingula loca obſeruata ſup-

peditant, dein ex his aequationibus valores incognitarum max'me idonei funt eruendi.

II.

Sit fecundum elementa approximata

L longitudo media planetae pro epocha arbitraria

t numerus dierum inde ab epocha vsque ad momentum obferuationis elapforum

η motus medius diurnus fidereus in minutis fecundis

π longitudo perihelii

$e = \sin\varphi$ excentricitas

a femiaxis maior

r radius vector

v anomalia vera

E anomalia excentrica

☊ longitudo nodi afcendentis.

i inclinatio orbitae

u argumentum latitudinis

λ longitudo heliocentrica.

γ latitudo heliocentrica

β latitudo geocentrica

R diftantia terrae a Sole.

Ex obferuatione autem fuppono effe

α longitudinem heliocentricam

$\mathit{6}$ latitudinem geocentricam

Denique per $\mathrm{d}L$, $\mathrm{d}\eta$, $\mathrm{d}\pi$ etc. denoto correctiones quantitatum L, η, π etc. Fit itaque $\mathrm{d}L + t\mathrm{d}\eta$ correctio longitudinis mediae, $\mathrm{d}L + t\mathrm{d}\eta - \mathrm{d}\pi$ correctio anomaliae mediae, adeoque per art. 15, 16 *Theoriae motus corp. coel.*

$$\mathrm{d}v = \frac{aa\cos\varphi}{rr}(\mathrm{d}L + t\mathrm{d}\eta - \mathrm{d}\pi) + \frac{aa}{rr}(2 - e\cos E - ee)\sin E\,\mathrm{d}\varphi$$

$\mathrm{d}r =$

$$\mathrm{d}r = \frac{r}{a}\,\mathrm{d}a + a\ \mathrm{tang}\,\varphi\ \mathrm{fin}\,v\,(\mathrm{d}L + t\,\mathrm{d}\eta - \mathrm{d}\pi) - a\ \mathrm{cof}\,\varphi\ \mathrm{cof}\,v\,\mathrm{d}\varphi$$

Porro fit correctio argumenti latitudinis $\mathrm{d}u = \mathrm{d}v + \mathrm{d}\pi - \mathrm{d}\Omega$, atque per art. 52 *Theor. mot.* correctio longitudinis heliocentricae $\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}\Omega - \mathrm{tang}\,\gamma\ \mathrm{cof}\,(\lambda - \Omega)\,\mathrm{d}i + \frac{\mathrm{cof}\,i}{\mathrm{cof}\,\gamma^2}\,\mathrm{d}u$. Hinc colligitur

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\lambda = {} & \frac{aa\ \mathrm{cof}\,\varphi\ \mathrm{cof}\,i}{rr\ \mathrm{cof}\,\gamma^2}\,\mathrm{d}L \\ & + \frac{taa\ \mathrm{cof}\,\varphi\ \mathrm{cof}\,i}{rr\ \mathrm{cof}\,\gamma^2}\,\mathrm{d}\eta \\ & + \left(\frac{\mathrm{cof}\,i}{\mathrm{cof}\,\gamma^2} - \frac{aa\ \mathrm{cof}\,\varphi\ \mathrm{cof}\,i}{rr\ \mathrm{cof}\,\gamma^2}\right)\mathrm{d}\pi \\ & + \frac{aa\ \mathrm{cof}\,i}{\mathrm{cof}\,\gamma^2}\,(2 - e\ \mathrm{cof}\,E - ee)\ \mathrm{fin}\,E\,\mathrm{d}\varphi \\ & + \left(1 - \frac{\mathrm{cof}\,i}{\mathrm{cof}\,\gamma^2}\right)\mathrm{d}\Omega \\ & - \mathrm{tang}\,\gamma\ \mathrm{cof}\,(\lambda - \Omega)\,\mathrm{d}i\end{aligned}$$

Porro quum habeatur

$$a^{\frac{3}{2}}\eta = \mathrm{Conft.}$$

$$r\ \mathrm{fin}\,(\beta - \gamma) = R\ \mathrm{fin}\,\beta$$

$$\mathrm{tang}\,\gamma = \mathrm{tang}\,i\ \mathrm{fin}\,(\alpha - \Omega)$$

fit per differentiationem

$$\frac{\mathrm{d}a}{a} = -\frac{2\,\mathrm{d}\eta}{3\eta}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} + \mathrm{cotang}\,(\beta - \gamma)\,.\,(\mathrm{d}\beta - \mathrm{d}\gamma) = \mathrm{cotg}\,\beta\,\mathrm{d}\beta, \text{ fiue}$$

$$\mathrm{d}\beta = \frac{\mathrm{fin}\,\beta\ \mathrm{cof}\,(\beta - \gamma)}{\mathrm{fin}\,\gamma}\,\mathrm{d}\gamma - \frac{\mathrm{fin}\,\beta\ \mathrm{fin}\,(\beta - \gamma)}{r\ \mathrm{fin}\,\gamma}\,\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}\gamma = \frac{\mathrm{fin}\,2\gamma}{\mathrm{fin}\,2i}\,\mathrm{d}i - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{fin}\,2\gamma\ \mathrm{cotang}\,(\alpha - \Omega)\,\mathrm{d}\Omega$$

vnde adhibito valore ipfius $\mathrm{d}r$ fupra euoluto colligitur

$\mathrm{d}\beta =$

$$d\beta = -\frac{a \sin\beta \sin(\beta-\gamma) \tan\varphi \sin v}{r \sin\gamma} dL$$
$$+ \left(\frac{2\sin\beta\sin(\beta-\gamma)}{3\rceil \sin\gamma} - \frac{at\sin\beta\sin(\beta-\gamma)\tan\varphi\sin v}{r\sin\gamma}\right) d\rceil$$
$$+ \frac{a\sin\beta\sin(\beta-\gamma)\tan\varphi\sin v}{r\sin\gamma} d\pi$$
$$+ \frac{a\sin\beta\sin(\beta-\gamma)\cos\varphi\cos v}{r\sin\gamma} d\varphi$$
$$+ \frac{2\sin\beta\cos(\beta-\gamma)\cos\gamma}{\sin 2i} di$$
$$- \sin\beta\cos(\beta-\gamma)\cos\gamma\,\mathrm{cotang}(\alpha-\Omega)\,d\Omega$$

Hinc valores longitudinis heliocentricae atque latitudinis geocentricae fiunt ex valoribus correctis elementorum $\lambda + d\lambda$, $\beta + d\beta$, adeoque quaeuis oppositio suppeditat binas aequationes

$$\alpha = \lambda + d\lambda$$
$$\mathfrak{b} = \beta + d\beta$$

12.

Applicando haecce praecepta ad sex oppositiones Palladis in art. 2 traditas, si calculum secundo elementorum systemati in art. 3. delineato superstruimus, sequentes duodecim aequationes obtinemus:

Ex oppositione *prima*, vbi longitudo computata inuenta est $277°\,36'\,20''07$, latitudo geocentrica $+\,46°\,26'\,29''\,19$:

$$0 = -183''93 + 0{,}79363\,dL + 143{,}66\,d\rceil + 0{,}39493\,d\pi + 0{,}95920\,d\varphi - 0{,}18856\,d\Omega + 0{,}17387\,di$$

$$0 = -6{,}81 - 0{,}02658\,dL + 46{,}71\,d\rceil + 0{,}02658\,d\pi - 0{,}20858\,d\varphi + 0{,}15946\,d\Omega + 1{,}25782\,di$$

Ex oppositione *secunda*, vbi longitudo computata $= 337°\,0'\,36''04$, latitudo geocentrica $= +\,15°\,1'\,46''71$:

$$0 = -0''06 + 0{,}58880\,dL + 358{,}12\,d\rceil + 0{,}26208\,d\pi - 0{,}85234\,d\varphi + 0{,}14912\,d\Omega + 0{,}17775\,di$$

$$0 = -3''09 + 0{,}01318\,dL + 28{,}39\,d\rceil - 0{,}01318\,d\pi - 0{,}07861\,d\varphi + 0{,}91704\,d\Omega + 0{,}54365\,di$$

Ex

Ex oppoſitione *tertia*, vbi longitndo computata $= 67^\circ\, 20'\, 42''\, 88$, latitudo geocentrica $= -\, 54^\circ\, 31'\, 3''\, 88$:

$$0 = -\,0''02 + 1{,}73436\, dL + 1846{,}17\, d\daleth - 0{,}54603\, d\pi - 2{,}05662\, d\varphi - 0{,}18833\, d\Omega - 0{,}17445\, di$$

$$0 = -\,8''98 - 0{,}12606\, dL - 227{,}42\, d\daleth + 0{,}12606\, d\pi - 0{,}38939\, d\varphi + 0{,}17176\, d\Omega - 1{,}35441\, di$$

Ex oppoſitione *quarta*, vbi longitudo computata $= 223^\circ\, 37'\, 25''\, 39$, latitudo geocentrica $= +\, 42^\circ\, 11'\, 28''\, 07$:

$$0 = -\,2''31 + 0{,}99584\, dL + 1579{,}03\, d\daleth + 0{,}06456\, d\pi + 1{,}99545\, d\varphi - 0{,}06040\, d\Omega - 0{,}33750\, di$$

$$0 = +\,2''47 - 0{,}08089\, dL - 67{,}22\, d\daleth + 0{,}08089\, d\pi - 0{,}09970\, d\varphi - 0{,}46359\, d\Omega + 1{,}22803\, di$$

Ex oppoſitione *quinta*, vbi longitudo computata $= 304^\circ\, 2'\, 59''\, 71$, latitudo geocentrica $= +\, 37^\circ\, 44'\, 31''\, 82$:

$$0 = +\,0''01 + 0{,}65311\, dE + 1329{,}09\, d\daleth + 0{,}38994\, d\pi - 0{,}08439\, d\varphi - 0{,}04305\, d\Omega + 0{,}34268\, di$$

$$0 = +\,38''12 - 0{,}00218\, dL + 38{,}47\, d\daleth + 0{,}00218\, d\pi - 0{,}18710\, d\varphi + 0{,}47301\, d\Omega - 1{,}14371\, di$$

Ex oppoſitione *ſexta*, vbi longitudo computata $= 359^\circ\, 34'\, 46''\, 67$, latitudo geocentrica $= -\, 7^\circ\, 20'\, 12''\, 13$:

$$0 = -\,317^\circ 73 + 0{,}69957\, dL + 1719{,}32\, d\daleth + 0{,}12913\, d\pi - 1{,}38787\, d\varphi + 0{,}17130\, d\Omega - 0{,}08360\, di$$

$$0 = +\,117''97 - 0{,}01315\, dL - 43{,}84\, d\daleth + 0{,}01315\, d\pi + 0{,}02929\, d\varphi + 1{,}02138\, d\Omega - 0{,}27187\, di$$

Sed ex his duodecim aequationibus decimam omnino reiiciemus, quum latitudo geocentrica obſeruata nimis incerta ſit.

13.

Quum ſex incognitas dL, $d\daleth$ etc. ita determinare non liceat, vt omnibus vndecim aequationibus exacte ſatisfiat, i. e. vt ſingulae incognitarum functiones quae ſunt ad dextram ſimul fiant $= 0$, valores eos eruemus, per quos functionum harum quadrata ſummam quam minimam efficiant. Facile quidem perſpicitur, ſi generaliter functiones lineares incognitarum p, q, r, s etc. propoſitae ſint hae

n +

$$n + a p + b q + c r + d s + \text{etc.} = w$$
$$n' + a' p + b' q + c' r + d' s + \text{etc.} = w'$$
$$n'' + a'' p + b'' q + c'' r + d'' s + \text{etc.} = w''$$
$$n''' + a''' p + b''' q + c''' r + d''' s + \text{etc.} = w'''$$

etc., aequationes conditionales, vt $ww + w'w' + w''w'' + w'''w''' +$ etc. $= \Omega$ fiat minimum, eſſe hasce

$$aw + a'w' + a''w'' + a'''w''' + \text{etc.} = 0$$
$$bw + b'w' + b''w'' + b'''w''' + \text{etc.} = 0$$
$$cw + c'w' + c''w'' + c'''w''' + \text{etc.} = 0$$
$$dw + d'w' + d''w'' + d'''w''' + \text{etc.} = 0$$

etc. ſiue

deſignando breuitatis cauſſa

$$an + a'n' + a''n'' + a'''n''' + \text{etc. per } [an]$$
$$aa + a'a' + a''a'' + a'''a''' + \text{etc. per } [aa]$$
$$ab + a'b' + a''b'' + a'''b''' + \text{etc. per } [ab]$$

etc.

$$bb + b'b' + b''b'' + b'''b''' + \text{etc. per } [bb]$$
$$bc + b'c' + b''c'' + b'''c''' + \text{etc. per } [bc]$$

etc. etc.

p, q, r, s etc. determinari debere per eliminationem ex aequationibus

$$[an] + [aa]p + [ab]q + [ac]r + [ad]s + \text{etc.} = 0$$
$$[bn] + [ab]p + [bb]q + [bc]r + [bd]s + \text{etc.} = 0$$
$$[cn] + [ac]p + [bc]q + [cc]r + [cd]s + \text{etc} = 0$$
$$[dn] + [ad]p + [bd]q + [cd]r + [dd]s + \text{etc.} = 0$$

etc.

Attamen quoties multitudo incognitarum p, q, r, s etc. paullo maior eſt, eliminatio laborem valde prolixum atque taedioſum requirit, quem ſequenti modo notabiliter contrahere licet. Praeter coëfficientes $[an]$, $[aa]$, $[ab]$ etc. (quorum multitudo fit $= \frac{1}{2}(ii + 3i)$, ſi multitudo incognitarum $= i$), etiam hunc computatum ſuppono $nn + n'n' + n''n'' + n'''n''' +$ etc. $= [nn]$, perſpicieturque facile fieri

$\Omega =$

$$\Omega = [nn] + 2[an]p + 2[bn]q + 2[cn]r + 2[dn]s + \text{etc.}$$
$$+ [aa]pp + 2[ab]pq + 2[ac]pr + 2[ad]ps + \text{etc.}$$
$$+ [bb]qq + 2[bc]qr + 2[bd]qs + \text{etc.}$$
$$+ [cc]rr + 2[cd]rs + \text{etc.}$$
$$+ [dd]ss + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Defignando itaque

$$[an] + [aa]p + [ab]q + [ac]r + [ad]s + \text{etc. per } A,$$

patet, fingulas partes ipfius $\frac{A^2}{[aa]}$, quae factorem p inuoluunt, in Ω contineri, adeoque $\Omega - \frac{A^2}{[aa]}$ effe functionem a p liberam. Quare ftatuendo

$$[nn] - \frac{[an]^2}{[aa]} = [nn, 1]$$

$$[bn] - \frac{[an].[bn]}{[aa]} = [bn, 1]$$

$$[cn] - \frac{[an].[cn]}{[aa]} = [cn, 1]$$

$$[dn] - \frac{[an].[dn]}{[aa]} = [dn, 1]$$

etc.

$$[bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]} = [bb, 1]$$

$$[bc] - \frac{[ab].[ac]}{[aa]} = [bc, 1]$$

$$[bd] - \frac{[ab].[ad]}{[aa]} = [bd, 1]$$

etc. etc.: erit

$$\Omega - \frac{A^2}{[aa]} = [nn, 1] + 2[bn, 1]q + 2[cn, 1]r + 2[dn, 1]s + \text{etc.}$$

$$+ [bb, 1]$$

$$+ [bb,1]qq + 2[bc,1]qr + 2[bd,1]qs + \text{etc.}$$
$$+ [cc,1]rr + 2[cd,1]rs + \text{etc.}$$
$$+ [dd,1]ss + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

quam functionem designabimus per Ω'.

Simili modo ponendo

$$[bn,1] + [bb,1]q + [bc,1]r + [bd,1]s + \text{etc.} = B$$

erit $\Omega' - \frac{B^2}{[bb,1]}$ functio a q libera, quam statuemus $= \Omega''$. Eodem modo faciemus

$$[nn,1] - \frac{[bn,1]^2}{[bb,1]} = [nn,2]$$

$$[cn,1] - \frac{[bn,1] \,.\, [bc,1]}{[bb,1]} = [cn,2]$$

$$[cc,1] - \frac{[bc,1]^2}{[bb,1]} = [cc,2]$$

etc. etc. atque

$$[cn,2] + [cc,2]r + [cd,2]s + \text{etc.} = C, \text{ vnde } \Omega'' - \frac{C^2}{[cc,2]}$$

erit functio ab r quoque libera. Eodem modo progrediemur, vsquedum in progressione $\Omega, \Omega', \Omega''$ etc. ad terminum ab omnibus incognitis liberum peruenerimus, qui erit $[nn,\mu]$, si multitudo incognitarum p, q, r, s etc. denotatur per μ. Habemus itaque

$$\Omega = \frac{A^2}{[aa]} + \frac{B^2}{[bb,1]} + \frac{C^2}{[cc,2]} + \frac{D^2}{[dd,3]} + \text{etc.} + [nn,\mu].$$

Iam quum $\Omega = ww + w'w' + w''w''$ etc. natura sua valorem negatiuum obtinere non possit, facile demonstratur, diuisores $[aa]$, $[bb,1]$, $[cc,2]$, $[dd,3]$ etc. necessario *positiuos* euadere debere (breuitatis tamen gratia hanc demonstrationem fusius hic non exsequor). Hinc vero sponte sequitur, valorem minimum ipsius Ω prodire, si fiat $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=0$ etc. Ex his itaque (μ) aequa-

aequationibus incognitae p, q, r, s etc. determinari debebunt, quod ordine inuerso facillime effici poterit, quum manifesto vltima aequatio vnicam incognitam implicet, penultima duas et sic porro. Simul haec methodus eo nomine se commendat, quod valor minimus aggregati Ω sponte inde innotescit, quippe qui manifesto est $= (nn, \mu)$.

14.

Applicemus iam haecce praecepta ad exemplum nostrum, vbi p, q, r, s etc. sunt dL, d7, dπ, dφ, dΩ, di. Calculo accurate absoluto hosce valores numericos inueni:

$[nn] = 148848$
$[an] = -371,09$
$[bn] = -580104$
$[cn] = -113,45$
$[dn] = +268,53$
$[en] = +94,26$
$[fn] = -31,81$
$[aa] = +5,91569$
$[ab] = +7203,91$
$[ac] = -0,09344$
$[ad] = -2,28516$
$[ae] = -0,34664$
$[af] = -0,18194$
$[bb] = +10834225$
$[bc] = -49,06$
$[bd] = -3229,77$
$[be] = -198,64$
$[bf] = -143,05$
$[cc] = +0,71917$
$[cd] = +1,13382$
$[ce] = +0,06400$
$[cf] = +0,26341$
$[dd] = +12,00340$
$[de] = -0,37137$
$[df] = -0,11762$
$[ee] = +2,28215$
$[ef] = -0,36136$
$[ff] = +5,62456$

Hinc porro deduxi

$[nn,1] = +125569$
$[bn,1] = -138534$
$[cn,1] = -119,31$
$[dn,1] = -125,18$
$[en,1] = +72,52$
$[fn,1] = -43,22$
$[bb,1] = +2458225$
$[bc,1] = +62,13$
$[bd,1] = -510,58$
$[be,1] = +213,84$
$[bf,1] = +73,45$
$[cc,1] = +0,71769$
$[cd,1] = +1,09773$
$[ce,1] = -0,05852$
$[cf,1] = +0,26054$
$[dd,1] = +11,12064$
$[de,1] = -0,50528$
$[df,1] = -0,18790$
$[ee,1] = +2,26185$
$[ef,1] = -0,37202$
$[ff,1] = +5,61905$

Atque hinc simili modo

$[nn,2] = +117763$
$[cn,2] = -115,81$
$[dn,2] = -153,95$
$[en,2] = +84,57$
$[fn,2] = -39,08$
$[cc,2] = +0,71612$
$[cd,2] = +1,11063$
$[ce,2] = -0,06392$
$[cf,2] = +0,25868$
$[dd,2] = +11,01463$
$[de,2] = -0,46088$
$[df,2] = -0,17205$
$[ee,2] = +2,24325$
$[ef,2] = -0,37841$
$[ff,2] = +5,61686$

Hinc porro

$[nn,3] = +99034$
$[dn,3] = +25,66$
$[en,3] = +74,23$
$[fn,3] = +2,75$
$[dd,3] = +9,29213$
$[de,3] = -0,36175$
$[df,3] = -0,57384$
$[ee,3] = +2,23754$
$[ef,3] = -0,35532$
$[ff,3] = +5,52342$

Hinc eodem modo

$[nn,4] = +98963$
$[en,4] = +75,23$
$[fn,4] = +4,33$
$[ee,4] = +2,22346$
$[ef,4] = -0,37766$
$[ff,4] = +5,48798$

Hinc

$[nn,5] = +96418$
$[fn,5] = +17,11$
$[ff,5] = +5,42383$

Atque hinc tandem

$[nn,6] = +96364$

Habe-

Habemus itaque ad determinationem incognitarum fex aequationes fequentes:

$$0 = +17''11 + 5{,}42383\,\mathrm{d}i$$
$$0 = +75''23 + 2{,}22346\,\mathrm{d}\Omega - 0{,}37766\,\mathrm{d}i$$
$$0 = +25''66 + 9{,}29213\,\mathrm{d}\varphi - 0{,}36175\,\mathrm{d}\Omega - 0{,}57384\,\mathrm{d}i$$
$$0 = -115''81 + 0{,}71612\,\mathrm{d}\pi + 1{,}11063\,\mathrm{d}\varphi - 0{,}06392\,\mathrm{d}\Omega + 0{,}25868\,\mathrm{d}i$$
$$0 = -13854'' + 2458225\,\mathrm{d}\rceil + 62{,}13\,\mathrm{d}\pi - 510{,}58\,\mathrm{d}\varphi + 213{,}84\,\mathrm{d}\Omega + 73{,}45\,\mathrm{d}i$$
$$0 = -371''09 + 5{,}91569\,\mathrm{d}L + 7203{,}91\,\mathrm{d}\rceil - 0{,}09344\,\mathrm{d}\pi - 2{,}28516\,\mathrm{d}\varphi - 0{,}34664\,\mathrm{d}\Omega - 0{,}18194\,\mathrm{d}i$$

vnde deducitur

$$\mathrm{d}i = -3''15$$
$$\mathrm{d}\Omega = -34''37$$
$$\mathrm{d}\varphi = -4''29$$
$$\mathrm{d}\pi = +166''44$$
$$\mathrm{d}\rceil = +0''054335$$
$$\mathrm{d}L = -3''06$$

Elementa itaque elliptica correcta, quae omnibus fex oppofitionibus quam proxime fatisfaciunt, haec funt:

Epocha longitudinis mediae 1803, ad meridianum Gottingenfem	221° 34′ 53″ 64
Motus medius tropicus diurnus	770″ 5010
Longitudo perihelii 1803	121 8 8, 54
Longitudo nodi afcendentis 1803	172 28 12, 43
Inclinatio orbitae	34 37 28, 35
Excentricitas = fin 14° 9′ 59″ 79	0, 2447424
Logarithmus femiaxis maioris	0, 4422071

15.

Subftitutis valoribus correctionum $\mathrm{d}L$, $\mathrm{d}\rceil$ etc., quos modo invenimus, in duodecim aequationibus art. 12, differentias fequentes inter valores longitudinum heliocentricarum atque latitudinum geocentricarum obferuatos atque computatos obtinemus:

in oppofitione anni	Differentia	
	longitudinis	latitudinis
1803	— 111″00	— 8″31
1804	+ 59, 18	— 36, 67
1805	+ 19, 92	+ 0. 07
1807	+ 85, 77	+ 25, 01
1808	+ 135, 88	+ 28, 72
1809	— 216, 54	+ 83, 01